Option T

Durée : 4 heures

Exercice 1 :

On désigne par E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et par F le sous-espace vectoriel formé des matrices symétriques.

Pour tout couple $(A,B) \in E^2$ on pose : $(A|B) = Tr({}^tA.B)$
où Tr(M) désigne la trace de la matrice M et ${}^tM$ la transposée de la matrice M.

On note enfin (U_{ij}), i = 1,2 , j = 1,2 , la base canonique de E :

$$U_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1°) Montrer que l'application : $(A,B) \mapsto (A|B)$ munit E d'une structure d'espace euclidien.
On note $\|M\|$ la norme de M déduite du produit scalaire.
Que peut-on dire de la base (U_{ij}) ?
Déterminer une base orthonormée de F.

2°) Soit $M \in E$. Déterminer $N \in F$ telle que la norme $\|M - N\|$ soit minimale.
Expliciter N à l'aide de M et ${}^tM$.

3°) Pour tout $A \in E$, soit θ_A la forme linéaire : $M \mapsto (A|M)$.
Montrer que l'application $\theta : A \mapsto \theta_A$ est un isomorphisme de E sur l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

Exercice 4 :

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, on pose :

$$u_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

1°) Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.

2°) Etudier les variations de la fonction u_n.
Que peut-on conclure pour la convergence de $\sum u_n$?
La somme S de la série $\sum u_n$ est-elle continue ?

3°) Montrer que la somme S est dérivable pour tout $x \neq 0$.

4°) N étant un entier ≥ 1, on pose $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x)$.

Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ (dépendant de N) tel que, pour $0 < |x| \leq \alpha$, on ait :

$$\frac{S(x)}{x} \geq \frac{S_N(x)}{x} \geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}.$$

En déduire la limite en 0 de $\frac{S(x)}{x}$.

S est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 2 :

E est l'espace euclidien IR^3 rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit D la droite issue de O et engendrée par le vecteur $\vec{i} + \vec{k}$.

On désigne par S la surface définie par rotation de D autour de l'axe $(O, \vec{k})$.

1°) Donner une équation cartésienne de S.

Déterminer un vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à S au point M de coordonnées (x,y,z).
En quel(s) point(s) ce vecteur n'est-il pas défini ?

2°) Soit L la courbe de représentation paramétrique :

$$x = \rho(\theta)\cos\theta, \qquad y = \rho(\theta)\sin\theta, \qquad z = \rho(\theta),$$

où ρ est une fonction de classe C^2.
Montrer que L est tracée sur S.
Déterminer une équation du plan osculateur à L au point de paramètre θ . On l'écrira sous la forme :

$$(x - \rho(\theta)\cos\theta)\,A(\theta) + (y - \rho(\theta)\sin\theta)\,B(\theta) + (z - \rho(\theta))\,C(\theta) = 0$$

en explicitant A, B et C à l'aide de θ, ρ, ρ' et ρ''.

3°) Montrer que le plan osculateur contient, en tout point de L, la normale à la surface S si ρ est solution de l'équation différentielle : $2\rho\rho'' - 4\rho'^2 - \rho^2 = 0$.

Intégrer cette équation en introduisant la fonction auxiliaire $u = \frac{1}{\rho}$.

En déduire une équation polaire de la projection de L sur le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 3 :

Le plan euclidien IR^2 étant rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe C de représentation paramétrique :

$$x = a(1 + \cos\theta), \qquad y = a\sin\theta, \qquad -\pi \le \theta \le \pi$$

où a est un réel > 0.

1°) Préciser la nature géométrique de C.
Soit L l'ensemble des projections orthogonales de O sur les tangentes à la courbe C.
Déterminer une représentation paramétrique de L. Donner une équation polaire de L.

2°) Soient M un point de L d'angle polaire θ, $\vec{T}$ un vecteur tangent en M à L orienté dans le sens des θ croissants.

Exprimer à l'aide de θ l'angle $(\vec{OM}, \vec{T})$.
En déduire les points de L où la tangente est parallèle à Ox ou Oy.

3°) Soit D_α la droite passant par O d'angle polaire α, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Montrer que D_α recoupe L en deux points M_α et M'_α.
Calculer la longueur du segment $M_\alpha M'_\alpha$.
Déterminer le lieu H du milieu I_α de $M_\alpha M'_\alpha$.
En déduire une construction géométrique des points M_α et M'_α.